

**ELECTROMAGNETISME**

EXAMEN TERMINAL

Durée : 2 h

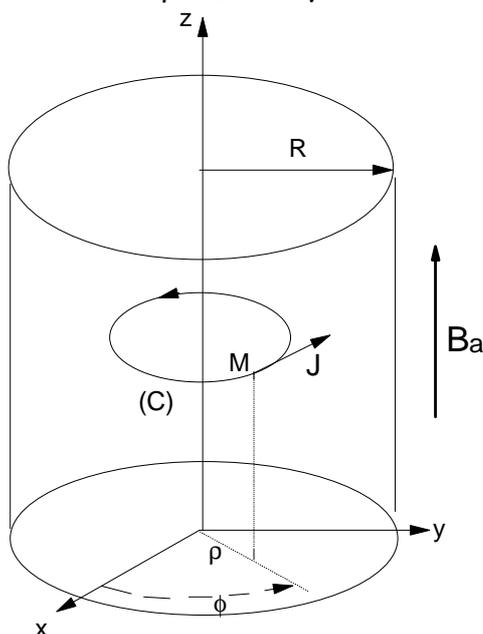
**I. Question de Cours**

1. Donner les équations de Maxwell et les relations de passage pour le champ ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) entre deux milieux, dans le cas le plus général, en indiquant les unités S.I. des grandeurs physiques.
2. Donner la relation entre la puissance volumique  $P$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le courant volumique  $\mathbf{J}$ . Préciser leurs unités S.I.

**II. Courants de Foucault dans un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique alternatif dirigé selon son axe.**

On considère un cylindre conducteur massif d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$  et de conductivité  $\gamma$ , situé dans un champ magnétique appliqué uniforme  $\mathbf{B}_a = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$  créé par des sources extérieures (voir figure).

1. La relation de Maxwell-Faraday relie  $\mathbf{B}_a$  à un champ électrique  $\mathbf{E}_1$ . En utilisant des considérations de symétrie, expliquer pourquoi  $\mathbf{E}_1$  est dirigé selon  $\mathbf{e}_\phi$ .
2. En utilisant un contour  $(C)$  de rayon  $\rho$  et d'axe  $Oz$ , orienté selon  $\mathbf{e}_\phi$ , écrire la relation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale et en déduire l'expression de  $\mathbf{E}_1$  en fonction de  $\rho$ ,  $B_0$ ,  $\omega$  et  $t$ .
3. En déduire l'expression du courant volumique  $\mathbf{J}_1$  en fonction de  $\rho$ ,  $B_0$ ,  $\omega$ ,  $t$ , et de la conductivité  $\gamma$ .
4. Calculer la puissance volumique  $P(t)$  dissipée par effet Joule dans le conducteur en fonction de  $\rho$ ,  $B_0$ ,  $\omega$  et  $\gamma$ . En déduire sa valeur moyenne dans le temps  $\langle P(t) \rangle_t$ .



5. On s'intéresse maintenant à la correction  $\mathbf{B}_1$  apportée au champ magnétique  $\mathbf{B}_a$  par la présence de  $\mathbf{E}_1$ . Calculer  $\mathbf{B}_1(\rho)$  en intégrant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire de côtés  $\Delta z$  pour l'un et  $\rho < R$  pour l'autre. On prendra  $\mathbf{B}_1(\rho=0) = 0$ . Donner l'expression de  $\mathbf{B}_1$  en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\mu_0$ ,  $\gamma$  et  $t$ .

### III. Propagation d'une onde cylindrique dans le vide.

On considère une onde électromagnétique progressive, monochromatique, émise par des sources distribuées le long d'un axe Oz. On donne, en notation complexe, l'expression suivante pour le champ électrique de l'onde :

$$\underline{\mathbf{E}} = E(\rho) \times \exp\{i(\omega t - k\rho)\} \times \mathbf{e}_z \text{ avec } E(\rho) \text{ réel.}$$

La propagation a lieu dans le vide et le vecteur d'onde est radial :  $\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{e}_\rho$ .

*On utilise le système de coordonnées cylindriques.*

1. Indiquer les invariances de  $\underline{\mathbf{E}}$  par rapport aux trois coordonnées et donner l'expression de  $\text{rot}\underline{\mathbf{E}}$  en fonction de  $E(\rho)$ ,  $dE(\rho)/d\rho$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $t$ .
2. En intégrant l'équation locale de Maxwell-Faraday par rapport au temps, calculer  $\underline{\mathbf{B}}$  en fonction de  $E(\rho)$ ,  $dE(\rho)/d\rho$ ,  $k$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  et  $t$ .
3. Donner l'expression de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en notation réelle. Montrer que  $\mathbf{B}$  peut être écrit comme la somme de deux termes respectivement proportionnels à  $\cos(\omega t - k\rho)$  et  $\sin(\omega t - k\rho)$ .
4. Calculer le vecteur de Poynting  $\mathbf{R}$  en notation réelle en fonction de  $E(\rho)$ ,  $dE(\rho)/d\rho$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\mu_0$  et  $t$ .
5. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting précédent en fonction de  $E(\rho)$ ,  $\mu_0$  et  $c$ .
6. En déduire la puissance électromagnétique moyenne traversant un cylindre d'axe Oz, de hauteur unité et de rayon  $\rho$ . Sachant que cette puissance est constante et égale à  $P_0$ , déterminer  $E(\rho)$  en fonction de  $P_0$ ,  $r$ ,  $\mu_0$  et  $c$ .
7. A quelle condition portant sur  $E(\rho)$  et  $dE(\rho)/d\rho$  peut-on dire que l'onde est approximativement plane ? Quelle inégalité forte entre  $\rho$  et  $\lambda$  doit être alors vérifiée ?

*On donne l'expression des opérateurs en coordonnées cylindriques pour un vecteur  $\mathbf{V}$  :*

$$\text{div } \vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{V}} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{e}}_\rho + \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{\mathbf{e}}_\phi + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{\mathbf{e}}_z$$